Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederazium svizra

Département fédéral de l'économie
de la formation et de la recherche DEFR
Commission suisse de maturité CSM

Examen suisse de maturité, session d'hiver 2026

MATHÉMATIQUES, DISCIPLINE FONDAMENTALE - niveau normal

Candidat-e : Nom : . . . . . Prénom : . . . . . Numéro : . . . . . .

Durée : 4 heures

Matériel autorisé : calculatrice et formulaires/tables

Total de points : 50 points

Consignes générales

Avant de débuter, contrôler le présent document, notamment l'ordre et le nombre de pages. Les réponses se font sur papier libre, à l'exception de celles demandées dans les espaces prévus à cet effet. À la fin de votre examen, rendre ce document avec votre travail.

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement :

- les problèmes 1 et 2 qui sont **obligatoires** ;
- **deux problèmes à choix** parmi les problèmes 3, 4 et 5.

Nombre de points obtenus : Problème 1 : . . . . . sur 15 pts

Problème 2 : . . . . . sur 15 pts

Problème 3 : . . . . . sur 10 pts

Problème 4 : . . . . . sur 10 pts

Problème 5 : . . . . . sur 10 pts

Total : . . . . . **sur 50 pts**

Note

Examinateur-trice chargé de la correction : . . . . . Date : . . . . . .

Remarque éventuelle : . . . . . .

. . . . . .

Problème 1 (obligatoire, 15 points)

On donne les fonctions f et g, définies par

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)\,e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{4}\,e^{-x}.$$

a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

b) Déterminer par calcul les zéros de f, le comportement de f vers $\pm\infty$ et les abscisses des points à tangente horizontale de f, en justifiant la nature de ces points.

c) Tracer soigneusement, dans un même repère, les représentations graphiques de f et g.

d) Montrer que

$$F(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2\,e^{-x}$$

est une primitive de la fonction f, puis calculer l'aire de la surface fermée comprise entre les représentations graphiques de f et de g.

e) Soit d_1 la droite tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse x_0 et d_2 la droite tangente à la représentation graphique de g au même point d'abscisse x_0.

Existe-t-il un réel $x_0 < 0$ tel que les pentes des droites d_1 et d_2 soient égales ? Justifier la réponse par un calcul et donner, si elle existe, la valeur de x_0.

Problème 2 (obligatoire, 15 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points $B(-5\,;\,4)$ et $C(-1\,;\,2)$, ainsi que deux droites d et g :

$$d : x - 3y + 17 = 0 \quad \text{et} \quad g : 3x + y - 9 = 0.$$

Représenter soigneusement ci-dessous, au fur et à mesure de leur apparition, tous les éléments définis au cours de la résolution du problème. Si les coordonnées d'un point n'ont pu être déterminées par calcul, il est permis de les lire sur la représentation graphique pour continuer le problème. Signaler alors clairement que vous lisez une donnée sur le graphique.

a) Montrer que le cercle Γ centré en C et tangent à la droite d admet pour équation

$$\Gamma : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0.$$

b) Vérifier que la droite g est aussi tangente à Γ et calculer les coordonnées du point de tangence T.

c) Calculer les coordonnées de A, le point d'intersection des droites d et g.

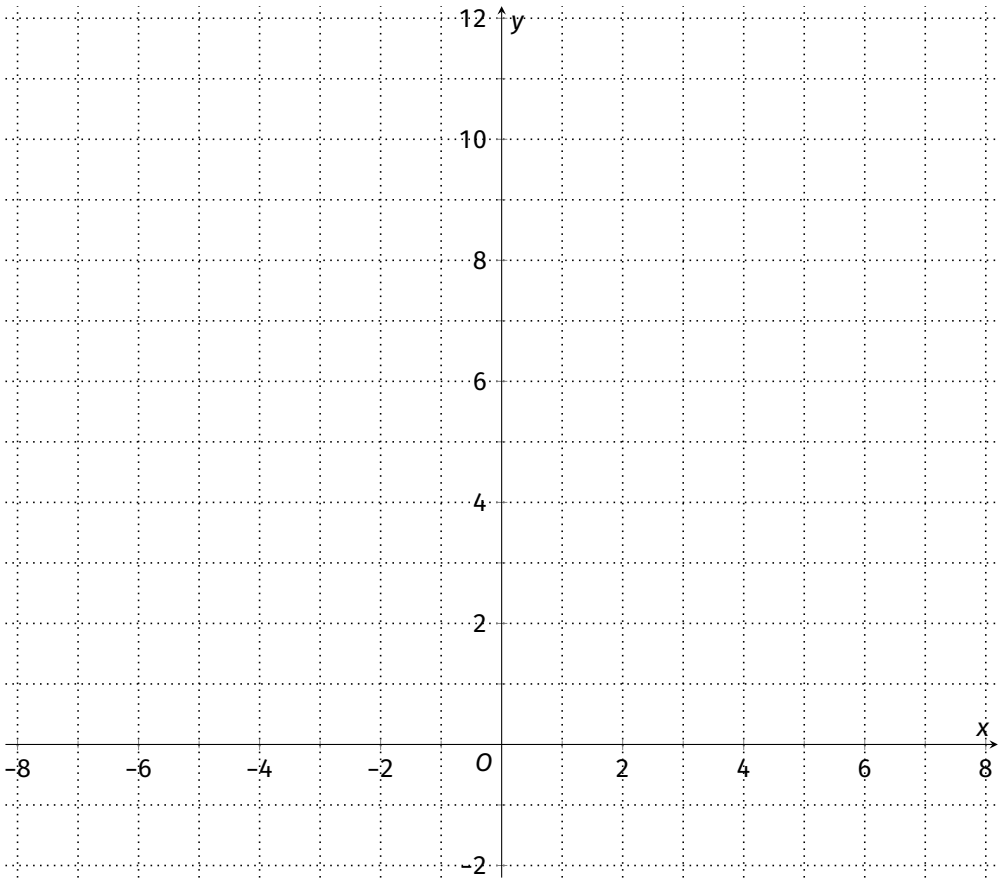
d) Calculer l'équation de la droite p passant par C et qui forme avec les droites d et g un triangle isocèle en A.

Pour la suite du problème, quel que soit le résultat trouvé, prendre pour l'équation de p

$$p : x + 2y - 3 = 0.$$

e) Vérifier par calcul que le point B est l'un des sommets du triangle isocèle en A et calculer l'aire de ce triangle.

f) Calculer l'équation du cercle γ passant par les points B et C et dont le centre K appartient à la droite g.



Problème 3 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Une urne opaque contient 10 boules colorées, indiscernables au toucher, réparties selon le tableau ci-dessous.

Nombre et couleur	Valeur d'une boule
7 boules jaunes	1 point
2 boules vertes	2 points
1 boule rouge	3 points

Un jeu se déroule selon les règles suivantes :

- on lance un dé standard à 6 faces, bien équilibré ;
- si le résultat du lancer est inférieur ou égal à 4, on tire de l'urne deux boules, sans remise ;
- dans tous les autres cas, on ne tire qu'une seule boule de l'urne.

a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

b) Calculer la probabilité de l'événement : « On tire une seule boule, et elle est jaune, ou on tire deux boules jaunes ».

c) Calculer la probabilité de réaliser un total de 3 points.

d) On a obtenu un total de 3 points. Calculer la probabilité de n'avoir tiré que la boule rouge.

e) Calculer la probabilité d'obtenir au maximum 4 points.

Après avoir joué une fois à ce jeu, on remet toutes les boules dans l'urne et on rejoue une seconde fois selon les mêmes règles.

f) Calculer la probabilité de ne tirer que des boules rouges au cours des deux parties.

On remplace maintenant le dé équilibré par un même dé, mais pipé ; avec ce nouveau dé, on ne joue qu'une seule fois, toujours selon les mêmes règles, et on constate que la probabilité de tirer deux boules est égale à p, et donc la probabilité de ne tirer qu'une seule boule vaut $1 - p$.

g) Calculer la probabilité, en fonction de p, de l'événement : « On tire une seule boule, et elle est jaune, ou on tire deux boules jaunes ».

h) Pour quelle valeur de p la probabilité de tirer une unique boule, de couleur jaune, est-elle égale à la probabilité de tirer exactement deux boules jaunes ?

Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

a) Déterminer les équations paramétriques de la droite d_1 passant par les points $A(2;5;2)$ et $B(0;5;4)$.

b) Le point $C(0;5;-4)$ appartient-il à la droite d_1 ? Justifier par des calculs.

c) Un élève affirme : « La droite d_1 est parallèle au plan Oxz. » L'assertion est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

d) Soient d_2 et d_3 les droites données par leurs équations paramétriques

$$d_2 : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 8 + 3\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad d_3 : \begin{cases} x = 1 - 3\mu \\ y = -3 + \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Déterminer la position relative de d_2 et d_3, c'est-à-dire si elles sont confondues, strictement parallèles, gauches ou sécantes. Si elles sont sécantes, préciser les coordonnées du point d'intersection.

e) Déterminer l'angle aigu φ formé par les droites d_2 et d_3 (réponse en degrés, arrondie au dixième).

f) Calculer les équations paramétriques du plan π_1 contenant les points A, B et $D(-1;1;2)$.

g) Soit π_2 le plan d'équations paramétriques

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\mu \\ z = 10 + \lambda + 2\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Montrer que d_2 est inclue dans π_2.

Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous.

a) $\dfrac{x^3 + 4}{x + 1} = 4$.

b) $x^3 - 19x - 30 = 0$, après avoir vérifié que $x = -2$ est une solution.

c) $\dfrac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$.

d) $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$; ne donner que les solutions dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.